MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 12
20.1.2020

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2 + 2xy + 2x + 2y = 0}_{(*)} \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad c = 0 \in \mathbb{R}.$$

Weil $\det A = -1 < 0$ ist Q eine Hyperbel oder ein sich schneidendes Geradenpaar und hat genau einen Mittelpunkt t mit

$$t = -\frac{1}{2} A^{-1} \cdot b \; = \; -\frac{1}{2} \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir diesen Punkt in die Gleichung $(*)$ ein, so ergibt sich $(-1)^2 + 0 - 2 + 0 = -1 \neq 0$, also liegt der Mittelpunkt t nicht auf Q, also muß es sich bei Q um eine Hyperbel handeln.

b) Die Variablentransformation $\binom{x}{y} = \binom{u}{v} + t$ mit $t = \binom{-1}{0}$ liefert (gemäß der in der Vorlesung durchgeführten Rechnung)

$$\begin{aligned}
(*) \iff & \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + t^T A t + b^T t + c = 0 \\
\iff & \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 = 0 \\
\iff & \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 1 - 2 = 0 \\
\iff & \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1
\end{aligned}$$

Für das charakteristische Polynom von A gilt nun

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

also sind

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

die beiden Eigenwerte von A und für ein geeignetes $P \in O_2(\mathbb{R})$ gilt $P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Damit liefert die Variablentransformation $\binom{u}{v} = P \cdot \binom{w}{z}$ weiter

$$\begin{aligned}
\dots \quad &\iff (w \quad z) \cdot P^T AP \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \\
&\iff (w \quad z) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \\
&\iff \lambda_1 w^2 + \lambda_2 z^2 = 1 \\
&\iff \lambda_1 w^2 - (-\lambda_2) z^2 = 1 \\
&\iff \frac{w^2}{\left(\left(\sqrt{\lambda_1}\right)^{-1}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\left(\sqrt{-\lambda_2}\right)^{-1}\right)^2} = 1,
\end{aligned}$$

die euklidische Normalform einer Hyperbel.

2. a) Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2 - 4\,x\,y + 4\,y^2 - 6\,x + 12\,y + 8 = 0}_{(*)} \right\}.$$

besitzt die Gleichung

$$(x \quad y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad c = 8 \in \mathbb{R}.$$

Jede Lösung $t \in \mathbb{R}^2$ des LGS $2At + b = 0$ ist ein Mittelpunkt von Q. Es ist mit $-\frac{1}{2}b = \binom{3}{-6}$

$$(A| - \tfrac{1}{2}b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array} \right) \overset{\text{II}+2\cdot\text{I}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

das LGS hat also unendlich viele Lösungen und damit Q unendlich viele Mittelpunkte. Einer davon ist z.B. $t = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[Sei M die Menge aller Mittelpunkte von einer beliebigen Quadrik Q. Dann stimmt M mit der Lösungsmenge des LGS $2At + b = 0$ überein, es sei denn, $Q = \varnothing$; dann ist nämlich $M = \mathbb{R}^2$. In unserem Fall ist $Q \neq \varnothing$, weil z.B. $\binom{4}{0} \in Q$, und die Lösungsmenge des obigen LGS ist die Gerade $\binom{3}{0} + \mathbb{R}\binom{2}{1}$, also sind genau dies alle Mittelpunkte von Q.]

Die Variablentransformation (Mittelpunktstransformation) $\binom{x}{y} = \binom{u}{v} + t$ mit $t = \binom{3}{0}$ liefert

(gemäß der in der Vorlesung durchgeführten Rechnung)

$$\begin{aligned}
(*) \iff & \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + t^T A t + b^T t + c = 0 \\
\iff & \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 = 0 \\
\iff & \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 9 - 18 + 8 = 0 \\
\iff & \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1
\end{aligned}$$

Für das charakteristische Polynom von A gilt nun

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)^2 = (4 - 5\,\lambda + \lambda^2) - 4 = (\lambda - 5) \cdot \lambda,$$

also sind

$$\lambda_1 = 5 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 0$$

die beiden Eigenwerte von A, und für ein geeignetes $P \in O_2(\mathbb{R})$ gilt $P^T A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Damit liefert die Variablentransformation $\binom{u}{v} = P \cdot \binom{w}{z}$ weiter

$$\begin{aligned}
\ldots \iff & \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P^T A P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \\
\iff & \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \\
\iff & 5w^2 = 1 \\
\iff & \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1,
\end{aligned}$$

die euklidische Normalform eines parallelen Geradenpaares.
[*Zum gleichen Ergebnis käme man auch nach Verfahren I der Vorlesung, wenn man* **zuerst** *eine Hauptachsentransformation und* **anschließend** *eine Parallelverschiebung vornimmt.*]

b) Die Menge M aller Mittelpunkte von Q ist nach a) die Gerade $M = \binom{3}{0} + \mathbb{R}\binom{2}{1}$. Aus der euklidischen Normalform sieht man, daß die beiden Geraden von der Mittelpunksgeraden M den Abstand $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.45$ haben. Dies genügt schon, um Q im x,y - Koordinatensystem zu zeichnen (Skizze auf einem separaten Blatt).

[*Natürlich kann man auch mit den beiden Transformationen eine Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(Q') = Q$ aufstellen, wobei $Q' = \{\binom{w}{z} \mid \frac{w^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}\}$. Diese lautet*

$$f\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $P \in O_2(\mathbb{R})$ mit $P^T A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also z.B. (hierfür müssen Eigenvektoren von A zu den beiden Eigenwerten berechnet werden!)

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

Q' besteht aus den beiden Geraden $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also besteht Q aus den beiden Geraden

$$f\Big(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ -0.4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und

$$f\Big(\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad]$$

3. Für die ebene Quadrik

$$Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{5x^2 + 4xy + 2y^2 - 1 = 0}_{(*_1)} \right\}$$

gilt

$$(*_1) \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{mit} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Das charakteristische Polynom von A_1 lautet

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \lambda\, E_2) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\ &= \big(\lambda^2 - 7\lambda + 10\big) - 4 \;=\; \lambda^2 - 7\,\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6); \end{aligned}$$

also besitzt A_1 die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 6$. Wegen

$$A_1 - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$A_1 - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+2\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich $P_1^\top A_1 P_1 = D_1$. Mit der Variablentransformation $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
(*_1) \iff & \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_1^\top A_1 P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \\
\iff & \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 1 \\
\iff & 1 \cdot w^2 + 6 \cdot z^2 = 1 \\
\iff & \frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{6}}$ dar.

Nun zu Q_2:

Für die ebene Quadrik

$$Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{3x^2 + 6xy + 11y^2 - 2 = 0}_{(*_2)} \right\}$$

gilt

$$(*_2) \quad \iff \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{mit} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Das charakteristische Polynom von A_2 lautet

$$\begin{aligned}
\det(A_2 - \mu\, E_2) &= \begin{vmatrix} 3-\mu & 3 \\ 3 & 11-\mu \end{vmatrix} = (3-\mu)(11-\mu) - 9 \\
&= \left(\mu^2 - 14\mu + 33\right) - 9 = \mu^2 - 14\,\mu + 24 \;=\; (\mu - 2)\,(\mu - 12)\,,
\end{aligned}$$

also besitzt A_2 die beiden Eigenwerte $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = 12$; wegen

$$A_2 - \mu_1 E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-3\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_2 zum Eigenwert $\mu_1 = 2$, und wegen

$$A_2 - \mu_2 E_2 = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+\frac{1}{3}\,\mathrm{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A_2 zum Eigenwert $\mu_2 = 12$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{\|u_1\|} & \frac{u_2}{\|u_2\|} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Mit der Variablentransformation $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}}$ gilt nun

$$
\begin{aligned}
(*_2) \iff & \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot P_2^\top A_2 P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 2 \\
\iff & \begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 2 \\
\iff & 2 \cdot w^2 + 12 \cdot z^2 = 2 \\
\iff & \frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung stellt die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{6}}$ dar. Damit haben die beiden Quadriken Q_1 und Q_2 dieselbe euklidische (metrische) Normalform

$$
Q' = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{w^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1 \right\},
$$

sind also euklidisch (metrisch) äquivalent.

Für die Bewegung f_1 (hier sogar eine orthogonale Abbildung)

$$
f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_1 \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{gilt also} \quad f_1(Q') = Q_1,
$$

und für die Bewegung f_2 (hier sogar eine orthogonale Abbildung)

$$
f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_2 \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{gilt also} \quad f_2(Q') = Q_2.
$$

$$
Q_1 \xleftarrow{f_1} Q' \xrightarrow{f_2} Q_2
$$

Folglich bildet dann die Bewegung (hier sogar eine orthogonale Abbildung)

$$
f = f_2 \circ f_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \cdot P_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

mit

$$
P_2 \cdot P_1^{-1} = P_2 \cdot P_1^\top = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
$$

die Ellipse Q_1 auf die Ellipse Q_2 ab. f ist eine Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel 45°. Die Skizze zu Aufgabe 3 zeigt die Lage von Q_1 und Q_2 im $x-y$-Koordinatensystem.

4. Wegen

$$
2At + b = 0 \iff At = -\frac{1}{2} b
$$

ist

$$
t^T A t + b^T t + c = -\frac{1}{2} t^T b + b^T t + c \; = \; -\frac{1}{2} (t^T b)^T + b^T t + c \; = \; -\frac{1}{2} b^T t + b^T t + c \; = \; c + \frac{1}{2} b^T t.
$$